



Вестник  
ЦЭМИ

2

2022



ISSN 2079-8784  
Свидетельство о регистрации СМИ  
№ 0000000000 от 06.05.2014 № 0000000000

Вестник ЦЭМИ 2013-2022

ISSN 2079-8784

URL - <http://ras.jes.su>

Все права защищены

Выпуск 2 Том 5. 2022

## Меры риска и количественные показатели платежеспособности

**Малиновский Всеволод Константинович**

*Главный научный сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН  
Российская Федерация, Москва, Нахимовский пр., 47*

### Аннотация

В статье получены верхние и нижние оценки для функции, неявно заданной нелинейным уравнением, полученным приравниванием вероятности неразорения за конечное время заранее выбранной константе. Это уравнение возникает в коллективной модели теории риска при определении экономического показателя, названного капиталом неразорения. Рассматриваемая математическая задача является теоретической основой выработки количественных требований к резервам, что составляет существенную часть различных систем практического регулирования, таких как Solvency II и Swiss Solvency Test.

**Ключевые слова:** капитал неразорения, безубыточный капитал, вероятность разорения, сумма под риском, модель коллективных рисков

**Дата публикации:** 05.07.2022

**Ссылка для цитирования:**

Малиновский В. К. Меры риска и количественные показатели платежеспособности // Вестник ЦЭМИ – 2022. – Том 5. – Выпуск 2 [Электронный ресурс]. URL: <https://cemi.jes.su/S265838870020599-1-1> (дата обращения: 05.07.2022). DOI: 10.33276/S265838870020599-1

1

### 1. Введение

2 В начале 1960-х годов в статье [2] был предложен подход<sup>1</sup>, названный “Value-at-Risk” (VaR; “капитал под риском”). С течением времени этот подход и его многочисленные модификации превратились в основной инструмент измерения рисков (см., например, [1], [10], [11]). Иногда VaR называют (см., например, [9], с. 80) фундаментальным принципом, лежащим в основе измерения риска в финансах и страховании. Однако по существу это ни что иное, как нахождение квантили некоторого специально выбранного распределения. Из-за возникающих технических сложностей это распределение часто выбирают намеренно упрощенным, что содержит потенциальную опасность неадекватных выводов.

3 Применительно к страховым рискам напомним, что система регулирования конкурентного страхового рынка ЕС (Solvency II; см. директивы [7], [8]) вступила в силу 1 января 2016 г. Она реализует риск-ориентированный подход к регулированию и управлению страховым рынком, в корне отличный от традиционного бухгалтерского подхода<sup>2</sup>, и опирается на оценку “капитала под риском”.

4 В настоящей статье предлагается и исследуется альтернативная мера риска, также являющаяся квантилью некоторого специально выбранного распределения. Эта мера риска, тесно связанная с вероятностью разорения, сложнее, чем VaR, но больше подходит для регулирования финансовой устойчивости. Несмотря на свою сложность, она допускает глубокое аналитическое исследование.

## 5 **2. Интегральная модель многолетнего страхового процесса**

6 Согласно устоявшейся практике страхового дела (см., например, [3], [6]) долгосрочный страховой процесс состоит из последовательности страховых периодов, обычно равных страховому году<sup>3</sup>. Каждый страховой год завершается отчетом перед надзорными органами, а начинается с принятия управленческих решений, действующих в течение всего этого года. Такие решения должны удовлетворять требованиям к платежеспособности, устанавливаемым надзорными органами. В остальном они могут быть достаточно произвольными.

7 Обычно страховщики не могут изменять свои управленческие решения до истечения страхового года, поскольку не имеют права менять условия договоров, заключенных с клиентами, до истечения срока их действия. Это отличает страховой рынок от многих других финансовых рынков.

8 В качестве вероятностной модели многолетнего страхового процесса в [12] и [13] рассматривается случайная последовательность  $(W^{[k]}, U^{[k]})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , с начальным вектором  $(W^{[0]}, U^{[0]})$ , траектории которой развиваются во времени в соответствии со следующей диаграммой:

$$w^{[0]} \xrightarrow{\gamma^{[0]}} \underbrace{u^{[0]} \xrightarrow{\pi^{[1]}} w^{[1]}}_{1\text{-й год}} \dots \xrightarrow{\pi^{[k-1]}} w^{[k-1]} \xrightarrow{\gamma^{[k-1]}} \underbrace{u^{[k-1]} \xrightarrow{\pi^{[k]}} w^{[k]}}_{k\text{-й год}} \dots \quad (1)$$

9 Здесь через  $w^{[k]}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , обозначены исходы случайных величин  $W^{[k]}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то есть состояния компании (например, разность между доходом и расходом) в конце страховых лет, через  $u^{[k]}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , обозначены реализации случайных величин  $U^{[k]}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , то есть управления (например, тарифы и резервы). Через  $\pi^{[k]}$  обозначены вероятностные механизмы страхования для  $k$ -го года; входными переменными для  $\pi^{[k]}$  являются управления  $u^{[k-1]}$ , а выходными переменными – состояния  $w^{[k]}$ . Через  $\gamma^{[k-1]}$  обозначаются управляющие правила для  $k$ -го года. Конечная последовательность  $\gamma_n = \{\gamma^{[k]}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$  называется  $n$ -летней стратегией управления.

10 В рамках этой модели в [12] и [13] рассматриваются проблемы роста, рентабельности и платежеспособности компании на основе оценки ее финансового положения за один год. Для этого, при построении  $\pi^{[k]}$ , привлекается модель коллективного риска<sup>4</sup>, общепринятая в качестве разумной модели страхового процесса компании, обладающей достаточно большим портфелем<sup>5</sup>.

11 В [12] и [13] исследованы различные ситуации, соответствующие как динамике рынка, так и состоянию и целям отдельной компании. Например, это ситуация, когда компания стремится к извлечению прибыли на доходном рынке с низкой конкуренцией; когда компания стремится к извлечению прибыли на доходном рынке с высокой конкуренцией; когда компания работает в условиях, близких к равновесным; когда компания агрессивно растет, что представляет собой большой риск внезапной неплатежеспособности; когда крупная компания применяет меры агрессивной защиты от агрессивного новичка.

12 Исследование платежеспособности компании требует (см. [15]) выбора адекватной меры риска. Традиционной мерой, используемой в исследованиях, является вероятность разорения (см. [14]). Однако эта мера риска весьма неудобна в приложениях, поскольку выражается не в денежных единицах, привычных практикам, а в безразмерных единицах. Поэтому во многих практически важных случаях в качестве меры риска используется “капитал под риском” (Value-at-Risk или VaR), который мы называем “безубыточным капиталом”. Адекватность этой меры риска при исследовании платежеспособности компании часто весьма сомнительна.

13 Цель настоящей работы – обратить внимание читателя на “капитал неразорения”. Как и “безубыточный капитал”, это квантильная мера риска. Обе меры риска определены в одной и той же модели коллективного риска, но первая из них существенно более адекватна рассматриваемой проблеме.

### 14 3. Модель коллективного риска

15 В модели коллективного риска процесс рискового резерва задается (см., например, [3], [6]) последовательностью независимых положительных случайных величин  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , называемых *интервалами* между страховыми случаями, и последовательностью независимых положительных случайных величин  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , называемых *величинами выплат* по страховым случаям. Будем считать, что эти последовательности взаимно независимы и что случайные величины  $T_i \stackrel{d}{=} T$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $Y_i \stackrel{d}{=} Y$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , имеют функции плотности  $f_T(t)$  и  $f_Y(t)$ , ограниченные сверху конечной величиной.

16 Процесс, описывающий разницу премиальных поступлений и страховых выплат, называется *процессом рискового резерва*. Для начального капитала (или начального рискового резерва)  $u \geq 0$  и премиальной интенсивности (для краткости называемой ценой)  $c \geq 0$  процесс рискового резерва определяется формулой

$$17 \quad R_s = u + cs - V_s, \quad s \geq 0, \quad (2)$$

18 где  $V_s$ ,  $s \geq 0$ , есть *процесс совокупных выплат* по страховым случаям, равный  $\sum_{i=1}^{N_s} Y_i$  или 0, если  $N_s = 0$  (или  $T_1 > s$ ), а

$$19 \quad N_s = \max \left\{ n > 0: \sum_{i=1}^n T_i \leq s \right\}, \quad (3)$$

20 или 0, если  $T_1 > s$ , есть *процесс наступления страховых случаев*.

21 Процесс рискового резерва (2) является ключевым в построении многолетней модели (1), в которой вероятностные механизмы страхования  $\pi^{[k]}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , соединяются через управления  $\gamma^{[k-1]}$ , которые выбираются в зависимости от требований надзорных органов, финансового положения и целей компании. Основными управляющими переменными обычно являются цена  $c$  и размер капитала  $u$  в начале страхового года.

22 Для  $c > 0$  случайная величина (с.в.)  $Y_{u,c} = \inf \{s \geq 0: V_s - cs > u\}$ , или  $+\infty$ , если  $V_s - cs \leq u$  для всех  $s \geq 0$ , называется *моментом разорения*. В отвлеченных математических терминах это первый момент пересечения границы  $u > 0$  случайным процессом  $V_s - cs$ ,  $s \geq 0$ .

23 Вероятность  $P\{Y_{u,c} \leq t\}$ , называемая *вероятностью разорения* за время  $t$ , интенсивно исследовалась по двум направлениям: получение точных выражений в терминах специальных функций и получение приближений при  $u \rightarrow \infty$ , при  $t \rightarrow \infty$ , или одновременно при  $t, u \rightarrow \infty$ . Новые приближения для  $P\{Y_{u,c} \leq t\}$  в условиях сформулированных ниже Теорем 1 и 2 приведены в [14].

24 Пусть  $A = 1 - \alpha$  и  $0 < \alpha < 1$  достаточно малое число, например,  $\alpha = 0,05$  или  $\alpha = 0,01$ . Назовем *безубыточным капиталом* (non-loss capital) за время  $t$  функцию  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$ ,  $c \geq 0$ , являющуюся положительным решением (относительно  $u$ ) уравнения

25 
$$P\{V_t - ct \leq u\} = A. \quad (4)$$

26 Назовем *капиталом неразорения* (non-ruin capital) за время  $t$  функцию  $u_{\alpha,t}(c)$ ,  $c \geq 0$ , являющуюся положительным решением (относительно  $u$ ) уравнения

27 
$$P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} (V_s - cs) \leq u\right\} = A. \quad (5)$$

28 Для тех  $c$ , для которых решение (4) (соответственно, (5)) отрицательно, мы полагаем  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$  (соответственно,  $u_{\alpha,t}(c)$ ) равным нулю.

29

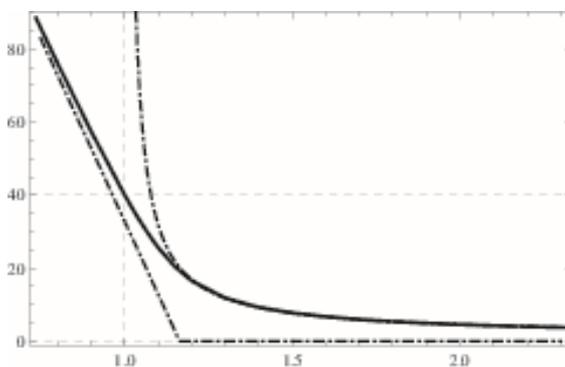


Рис. 1. Капитал неразорения и капитал безубыточности, когда  $T$  и  $Y$  показательно распределены с параметрами  $\delta=1$ ,  $\rho=1$ , соответственно, и  $\alpha=0,05$ ,  $t=200$

30 **Замечание 1.** Легко убедиться, что уравнение (4) переписывается в виде  $P\{R_t < 0\} = \alpha$ , а уравнение (5) в виде  $P\{\inf_{0 \leq s \leq t} R_s < 0\} = \alpha$  или

31 
$$P\{Y_{u,c} \leq t\} = \alpha. \quad (6)$$

32 **Замечание 2.** Как  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$ , так и  $u_{\alpha,t}(c)$ , являются квантильными мерами риска, для случайных величин  $V_t - ct$  и  $\sup_{0 \leq s \leq t} (V_s - cs)$ , соответственно;  $u_{\alpha,t}(c)$  отличается от  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$  тем, что учитывает не только состояние денежного потока на конец года, но и динамику в течение всего года. Поскольку  $V_t - ct \leq \sup_{0 \leq s \leq t} (V_s - cs)$ , имеем

33 
$$\underline{u}_{\alpha,t}(c) \leq u_{\alpha,t}(c), \quad c \geq 0,$$

34 и  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$  является нижней границей для  $u_{\alpha,t}(c)$  (см. рис. 1: графики (ось  $X$  есть  $c$ ) функций  $u_{\alpha,t}(c)$  (сплошная линия) и  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$ ,  $\bar{u}_{\alpha}(c)$  (точечно-штриховые линии), когда  $T$  и  $Y$  показательно распределены с параметрами  $\delta = 1$ ,  $\rho = 1$ , соответственно, и  $\alpha = 0,05$ ,  $t = 200$ . Горизонтальная штриховая линия:  $u_{\alpha,t}(\delta/\rho) = 40,08$ . Вертикальная штриховая линия:  $\delta/\rho = 1$ ).

35 **Замечание 3.** То, что мы называем “безубыточный капитал”, часто называют “капитал под риском” (Value-at-Risk или VaR). Выбор нами указанного термина связан с тем, что если начальный капитал в выражении (2) выбран равным  $\underline{u}_{\alpha,t}(c)$ , то вероятность отрицательного баланса на конец года (на момент времени  $t$ ) равна  $\alpha$ . Аналогично обосновывается выбор термина “капитал неразорения”: если начальный капитал в выражении

(2) выбран равным  $u_{\alpha,t}(c)$ , то это обеспечивает неразорение в течение года (длины  $t$ ) с вероятностью  $1 - \alpha$ .

36 **Замечание 4.** Модель (2) однородна по времени, что соответствует портфелю неизменного объема. При наличии ценовой конкуренции, приводящей к миграции страхователей, возникает неоднородная модель (см. [12], [13]). Мы ограничиваемся случаем портфеля неизменного объема потому, что целью статьи является демонстрация структурных особенностей функции  $u_{\alpha,t}(c)$ . Случай портфеля переменного объема исследован в [12], [13].

37 Выражение  $u_{\alpha,t}(c)$ ,  $c > 0$ , является неявно заданной функцией, причем левая часть уравнения (6), выражение для которой известно лишь в исключительных случаях, монотонно убывает, если переменная  $u$  возрастет, а прочие параметры не изменяются. Поэтому решение (6) существует, единственно, и требует аналитического исследования.

#### 38 4. Аналитическое исследование капитала неразорения

39 Через  $\kappa_\gamma = \Phi_{(0,1)}^{-1}(1 - \gamma)$  обозначим  $(1 - \gamma)$  квантиль стандартного нормального распределения. Для постоянной  $0 < \alpha < 1/2$  (которая в дальнейшем будет выбираться достаточно малой) имеем  $0 < \kappa_\alpha < \kappa_{\alpha/2}$ . Будем обозначать

40

$$M = ET/EY, \quad D^2 = ((ET)^2DY + (EY)^2DT)/(EY)^3.$$

41 Следующая теорема дает асимптотическое представление для  $u_{\alpha,t}(c)$  в точках  $c = 0$  и  $c = c^*$ , где  $c^* = 1/M$ .

42 **Теорема 1.** Если плотности  $f_T(y)$  и  $f_Y(y)$  ограничены сверху конечной величиной,  $D^2 > 0$ ,  $E(T^3) < \infty$ ,  $E(Y^3) < \infty$ , то

43

$$u_{\alpha,t}(0) = \frac{t}{M} + \frac{D}{M^{3/2}} \kappa_\alpha \sqrt{t} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty$$

44 и

45

$$u_{\alpha,t}(c^*) = \frac{D}{M^{3/2}} \kappa_{\alpha/2} \sqrt{t} (1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty.$$

46 **Теорема 2.** Если плотности  $f_T(y)$  и  $f_Y(y)$  ограничены сверху конечной величиной,  $D^2 > 0$ ,  $E(T^3) < \infty$ ,  $E(Y^3) < \infty$ , то

47

$$u_{\alpha,t}(c) = \begin{cases} (c^* - c)t + \frac{D}{M^{3/2}} z_{\alpha,t} \left( \frac{M^{3/2}(c^* - c)}{D} \sqrt{t} \right) \sqrt{t}, & 0 < c \leq c^*, \\ \frac{D}{M^{3/2}} z_{\alpha,t} \left( \frac{M^{3/2}(c^* - c)}{D} \sqrt{t} \right) \sqrt{t}, & c > c^*, \end{cases}$$

48 где для достаточно больших  $t$  функция  $z_{\alpha,t}(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , непрерывна и монотонно возрастает, если  $y$  возрастает от  $-\infty$  до 0, и монотонно убывает, если  $y$  возрастает от 0 до  $\infty$ , причем

49

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} z_{\alpha,t}(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} z_{\alpha,t}(y) = \kappa_\alpha$$

50 и  $z_{\alpha,t}(0) = \kappa_{\alpha/2} (1 + o(1))$ ,  $t \rightarrow \infty$ .

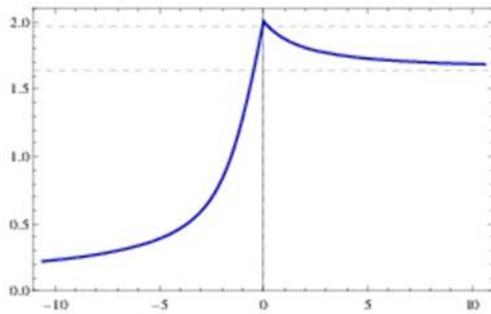


Рис. 2.

52 На рис. 2. представлен график функции  $z_{\alpha,t}(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , при  $t = 200$ ,  $\alpha = 0,05$ . Случайные величины  $T$  и  $Y$  распределены показательно с параметрами  $\rho = 1$ ,  $\delta = 1$ . Горизонтальные штриховые линии:  $\kappa_\alpha = 1,645$  и  $\kappa_{\alpha/2} = 1,960$ .

53 При  $0 < c \leq c^*$ , следствием Теоремы 2 являются асимптотические неравенства

$$54 \quad (c^* - c)t + \frac{D}{M^{3/2}} \kappa_\alpha \sqrt{t}(1 + o(1)) \leq u_{\alpha,t}(c) \leq (c^* - c)t + \frac{D}{M^{3/2}} \kappa_{\alpha/2} \sqrt{t}(1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (7)$$

55 При  $c > c^*$ , поскольку  $\mathbb{P}\{Y_{u,c} \leq t\} \leq \mathbb{P}\{Y_{u,c} < \infty\}$ , верхней оценкой  $u_{\alpha,t}(c)$  является решение (или верхняя оценка решения) уравнения

$$56 \quad \mathbb{P}\{Y_{u,c} < \infty\} = \alpha$$

57 относительно  $u$ . В моделях, для которых существует зависящее от  $c$  решение  $\kappa > 0$  уравнения  $\text{Eexp}\{\kappa(Y - cT)\} = 1$  и для которых  $\mathbb{P}\{Y_{u,c} < \infty\} \leq e^{-\kappa u}$  для всех  $u \geq 0$ , имеем

$$58 \quad u_{\alpha,t}(c) \leq -\frac{\ln \alpha}{\kappa}. \quad (8)$$

59 Если  $Y$  и  $T$  распределены показательно с параметрами  $\rho, \delta > 0$ , то  $c^* = \delta/\rho$ ,  $\kappa = \rho - \delta/c$  и  $\mathbb{P}\{Y_{u,c} < \infty\} = (1 - \kappa/\rho) e^{-\kappa u}$  для всех  $u \geq 0$  и имеется более точная, чем (8), оценка

$$60 \quad u_{\alpha,t}(c) \leq \max \left\{ 0, -\frac{\ln(\alpha c \rho / \delta)}{\rho - \delta / c} \right\}.$$

61

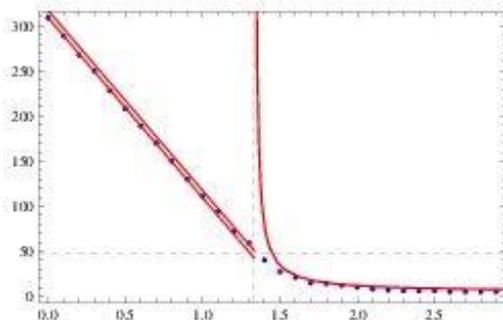


Рис. 3. Модель, в которой с.в.  $T$  имеет распределение Эрланга и с.в.  $Y$  распределена показательно: см. Пример 1

62 **ПРИМЕР 1.** Для модели, в которой с.в.  $T$  имеет распределение Эрланга с параметрами  $\delta > 0$  и целым  $k$  и с.в.  $Y$  распределена показательно с параметром  $\rho > 0$ , прямыми расчетами легко найти, что  $ET = k/\delta$ ,  $DT = k/\delta^2$ ,  $EY = 1/\rho$ ,  $DY = 1/\rho^2$  и поэтому

63

$$c^* = \frac{\delta}{k\rho}, \quad M = \frac{k\rho}{\delta}, \quad D^2 = \frac{k(k+1)\rho}{\delta^2}.$$

64 Поскольку

65

$$Ee^{-\kappa c T} = \frac{\delta^k}{(\delta + c\kappa)^k}, \quad Ee^{\kappa Y} = \frac{\rho}{\rho - \kappa},$$

66 уравнение  $E \exp\{\kappa(Y - cT)\} = 1$  записывается в виде

67

$$(\rho - \kappa)(\delta + c\kappa)^k - \delta^k \rho = 0$$

68 и при  $c > \delta/(k\rho)$  его решение легко найти численно.

69 На Рис. 3 (по оси  $X$  откладывается  $c$ ) для  $\delta = 8/5$ ,  $k = 2$ ,  $\rho = 3/5$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $t = 200$  точками показаны значения  $u_{\alpha,t}(c)$ ,  $c > 0$ , вычисленные методом имитационного моделирования. Для  $0 < c < c^*$  показаны границы (7). Для  $c > c^*$  показана верхняя граница (8). Вертикальная штриховая линия:  $c^* = 4/3$ . Горизонтальная штриховая линия:  $u_{\alpha,t}(c^*) = 48$ ; это значение получено имитационным моделированием.

70

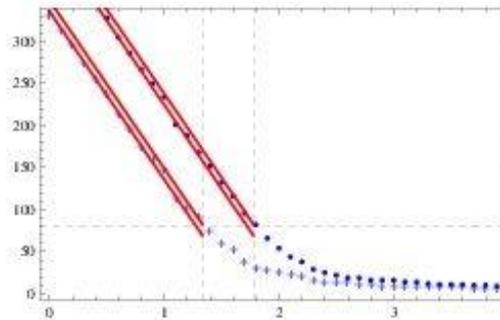


Рис. 4. Модель, в которой с.в.  $T$  распределена показательно и с.в.  $Y$  имеет распределение Парето: см. Пример 2

71 **ПРИМЕР 2.** Для модели, в которой с.в.  $T$  распределена показательно с параметром  $\delta$  и с.в.  $Y$  имеет распределение Парето с параметрами  $a_Y$ ,  $b_Y$ , т. е.

72

$$f_T(x) = \delta e^{-\delta x}, \quad f_Y(x) = \frac{a_Y b_Y}{(x b_Y + 1)^{a_Y + 1}}, \quad x > 0,$$

73 прямыми расчетами легко найти, что

74

$$ET = 1/\delta, \quad DT = 1/\delta^2, \\ EY = 1/((a_Y - 1) b_Y), \quad DY = a_Y/((a_Y - 1)^2 (a_Y - 2) b_Y^2).$$

75

Поэтому

76

$$c^* = \frac{\delta}{(a_Y - 1) b_Y}, \quad M = \frac{(a_Y - 1) b_Y}{\delta}, \quad D^2 = \frac{2(a_Y - 1)^2 b_Y}{\delta^2 (a_Y - 2)}.$$

77 На Рис. 4 (по оси  $X$  откладывается  $c$ ) для  $a_Y = 10$ ,  $b_Y = 0,05$  (точки),  $a_Y = 3$ ,  $b_Y = 0,3$  (крестики),  $\delta = 4/5$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $t = 200$  показаны значения  $u_{\alpha,t}(c)$ ,  $c > 0$ , вычисленные методом имитационного моделирования. Для  $0 < c < c^*$  показаны границы (7). Вертикальная штриховая линия:  $c^* = 1,7778$  (точки) и  $c^* = 1,3333$  (крестики). Горизонтальная штриховая линия:  $u_{\alpha,t}(c^*) = 80$ ; это значение получено имитационным моделированием и совпадает в обоих случаях.

78 Заметим, что положительного решения уравнения  $E \exp\{u(Y - cT)\} = 1$  в этой модели не существует и построение верхней оценки для  $u_{\alpha,t}(c)$  при  $c > c^*$ , связанное с нахождением для вероятности  $P\{Y_{u,c} < \infty\}$  оценки сверху, справедливой для всех  $u \geq 0$ , является частной задачей, выходящей за рамки настоящей статьи. Заметим также, что при  $a_Y = 3$ ,  $b_Y = 0,3$  (крестики) момент  $E(Y^3)$  не является конечным. Это подсказывает, что моментные условия в Теоремах 1 и 2 могут быть несколько ослаблены. Однако это существенно усложнит доказательство, что также выходит за рамки настоящей статьи.

## 79 5. Заключение

80 В статье рассматривается теоретическая основа выработки количественных требований к резервам, что составляет существенную часть различных систем практического регулирования, таких как Solvency II и Swiss Solvency Test.

81 Исходя из многолетней модели страхового процесса (см. [12], [13]), в рамках модели коллективных рисков исследуются резервы двух видов: “безубыточный капитал” и “капитал неразорения”. Первый из них рассчитан на основе подхода, известного как “Value-at-Risk” (VaR), а второй – на основе технически более сложного, но и более адекватного задаче о неразорении, подхода, опирающегося на использование вероятности неразорения за конечное время.

82 Важность задачи определяется тем, что “безубыточный капитал” систематически недооценивает “капитал неразорения”, но именно этот последний показатель является теоретически адекватным в задаче о выработке количественных требований к резервам, достаточным для неразорения с заданной вероятностью.

83 С точки зрения математических методов сложность проблемы состоит в том, что “безубыточный капитал” и “капитал неразорения” являются функциями, неявно заданными нелинейными уравнениями, но уравнение для первого из них выглядит намного проще, чем для второго. Оказывается, что при использовании подхода, развитого в [14], функция, неявно заданная более сложным уравнением, также допускает глубокое аналитическое исследование.

---

### Примечания:

1. В [4] утверждается, что подход Value-at-Risk стал основой управления рисками на финансовых рынках с момента его введения в техническом документе [11].
  2. Изменения в страховой отрасли, связанные с регулированием, основанным на оценке риска, такие как Solvency II и Swiss Solvency Test, обсуждаются в [5].
  3. Если надзорные органы сомневаются в платежеспособности компании, то страховой период для нее может быть назначен меньше календарного года.
  4. Эта модель также называется моделью Лундберга, по имени предложившего ее в начале 1900-х годов ученого.
  5. Заметим, что время в модели коллективного риска не календарное, а операционное, т.е. пропорциональное объему портфеля или объему операций.
-

## Библиография:

1. Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks / Basel Committee on Banking Supervision // Bank for International Settlements. – 1996. – URL : <http://www.bis.org/publ/bcbs24.pdf> (дата обращения: 04.05.2022).
2. Baumol, W. J. An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection / W. J. Baumol // Management Science. – 1963. – Vol. 10, No. 1. – p. 174–182.
3. Beard, R.E. Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance/ R. E. Beard, T. Pentikäinen, E. Pesonen. – 3-rd ed. – London ; New York : Chapman and Hall, 1984. – 408 p.
4. Choudhry, M. An Introduction to Value-at-Risk/ M. Choudhry. – 4-th ed. – Chichester : John Wiley & Sons, 2006. – 192 p.
5. Dacorogna, M. A change of paradigm for the insurance industry/ M. Dacorogna // Annals of Actuarial Science. – 2018. – Vol. 12, Part 2. – p. 211–232.
6. Daykin, C. D. Practical Risk Theory for Actuaries / C. D. Daykin, T. Pentikäinen, M. Pesonen. – London etc. : Chapman and Hall, 1996. – 546 p.
7. Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II) : [Brussels, 25 November 2009].
8. Directive 2014/51/EU of the European Parliament and of the Council of 16 April 2014 amending Directives 2003/71/EC and 2009/138/EC and Regulations (EC) No 1060/2009, (EU) No 1094/2010 and (EU) No 1095/2010 in respect of the powers of the European Supervisory Authority (European Insurance and Occupational Pensions Authority) and the European Supervisory Authority (European Securities and Markets Authority) : [Brussels, 16 April 2016].
9. Heep-Altiner, M. Solvency II in the Insurance Industry. Application of a Non-Life Data Model / M. Heep-Altiner, M. Mullins, T. Rohlfs, Eds. – Springer Cham, 2018. – 219 p.
10. Morgan, J.P. RiskMetrics — Technical Document / J.P. Morgan, Reuters. – New York, 1996.
11. Morgan, J.P. Introduction to CreditMetrics / J.P. Morgan. – New York, 1997.
12. Малиновский, В. К. Модели долгосрочного страхового планирования / В. К. Малиновский. – М.: Янус-К, 2020. – 390 с.
13. Malinovskii, V. K. Insurance Planning Models / V. K. Malinovskii. – Singapore : World Scientific, 2021. – 354 p.
14. Malinovskii, V. K. Level-Crossing Problems and Inverse Gaussian Distributions / V. K. Malinovskii. – CRC Press, 2021. – 452 p.
15. Malinovskii, V.K. Risk Measures and Insurance Solvency Benchmarks / V. K. Malinovskii. – Chapman and Hall/CRC, 2021. – 340 p.

# Risk measures and quantitative indicators of solvency

**Vsevolod K. Malinovskii**

*Chief Researcher , CEMI RAS*

*Russian Federation, Moscow, Nakhimovskii pr., 47*

## Abstract

In the article, upper and lower bounds are given for a function implicitly defined by a non-linear equation obtained by equating the probability of non-ruin in a finite time to a pre-selected constant. This equation arises in the collective model of risk, when an economic indicator, called non-ruin capital, is examined. The mathematical problem under consideration is the theoretical foundation for developing quantitative requirements for reserves, which is an essential part of various practical regulation systems, such as Solvency II and Swiss Solvency Test.

**Keywords:** non-loss capital, non-ruin capital, probability of ruin, value-at-risk, collective risk model

**Publication date:** 05.07.2022

## Citation link:

Malinovskii V. Risk measures and quantitative indicators of solvency // Vestnik CEMI – 2022. – V. 5. – Issue 2 [Electronic resource]. URL: <https://cemi.jes.su/S265838870020599-1-1> (circulation date: 05.07.2022). DOI: 10.33276/S265838870020599-1

---

Код пользователя: 16978; Дата выгрузки: 05.07.2022; URL - <http://ras.jes.su/cemi/s265838870020599-1-1> Все права защищены.