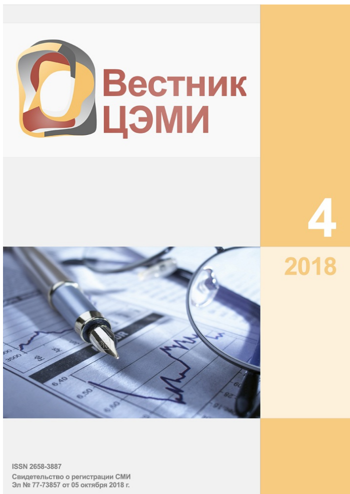


Herald of CEMI. 2013-2020

ISSN 2658--3887

URL - http://cemi.jes.su

Issue 4 Volume . 2018

The dynamic systems in the Theory of Decisions for any set of agents

B. Efimov
CEMI RAS
Moscow, Nakhimovsky prospect 47

Abstract

The dynamic systems in Theory of Decisions considers for any set of agents. Show, that principal role plays Axiom of Martin from Theory of sets, which consistent with Axiom of Choice. Show, that principal role too plays Linear operator extension and Linear operator averagings of Milutin's for design of topological ruls G.Chichilnisky for any set of agents.

Keywords list (en): Axiom of Martin, Operators extension and averagin, Topological Social Choice, Endless pothential, Markov"s process, Boundary of Feller Markov process.

Date of publication: 03.02.2019

Acknowledgment:

Номер государственной регистрации AAA-A18-118021990120-2. Научный руководитель темы академик Макаров В. Л.

Citation link:

Efimov B. The dynamic systems in the Theory of Decisions for any set of agents // Herald of CEMI. 2018. Issue 4 [Electronic resource]. Access for registered users. URL: https://cemi.jes.su/s265838870000170-0-1/ (circulation date: 17.02.2020). DOI: 10.33276/S0000170-0-1

1 В работе (1), написанной совместно с Ю.Н. Гаврильцом, в качестве функций полезности участников мы взяли квадратичные функции, имеющие кусочно- линейный градиент. Именно, для таких функций показано, что равновесие (гомеостаз) существует и

совпадает с альтруистическим равновесием Бержа. См. В. Васильев (11), а также (9) Гусейнов А.А, Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Математические основы золотого правила нравственности. (Теория нового, альтруистического уравновешивания конфликтов в противоположность «эгоистичному» равновесию по Нэшу).

2 Работа (2), также написанная совместно с Ю.Н. Гаврильцом, отличается тем, что все участники имеют в качестве области определения n-мерный куб, то есть их функции полезности зависят от всех участников (взаимозависимость), а выпуклостью обладают не всегда. Рекомендуется вместе с этой работой посмотреть статьи (4) и (5).

3 В работе (3) я впервые работал с цепями Маркова (процессы рождения и смерти) и решил методом А.Н. Колмогорова стохастическое уравнение, записанное в форме Ланжавена, определив его параметры.

4 В работе Луки Лоуверса (17) введено понятие «слабого ω-Чичильницкой правила $\Phi:X^{\omega} \rightarrow X$, определённого на любом пространстве X, при этом $x \in X^{\omega}$ означает, что x состоит из блоков одинаковых предпочтений и одинаковой длины

5 $X = ((x_0,\ldots,x_0), (x_1,\ldots,x_1),\ldots,(x_n,\ldots,x_n),\ldots) \rightarrow \Phi(x_0,x_1,\ldots.x_n,\ldots)$.

6 При этом 1) Ф непрерывна по отношению к топологии Тихонова на произведении X^{ω} , 2) Ф конечно анонимна (переставляются только блоки) и 3) $x_0 = x_1 =\ldots=x_n = y$, то $\Phi(y,y,\ldots,y,\ldots) =y$ (единодушие «по блокам»). Л.Лоуверс доказал следующую теорему.

7 **Теорема.** Не существует слабого ω-Чичильницкого правила в любое хаусдорфово пространство X.

8 *Пример*.

9 Ослабим условия 1) и 2) и построим непрерывное отображение $\Phi:X^{\omega}\rightarrow X$, если X является $C = D^{\omega}$ канторовским множеством. Представим C в виде бесконечного произведения $C = C^{\omega}$ это снова C и через Q обозначим диагональ в C^{ω}. Пусть $\Phi: C^{\omega} \rightarrow C$ ретракция на Q=C. Если убрать все блоки, то уважение согласия выполнено. Отображение непрерывно в топологии Тихонова. Для конечных произведений симметрично.

10 Топологическое агрегирования предпочтений: случай континуума агентов (Candeal, Chichi., Indurian, Efimov, Koshevoy, Luc Lauwers).

11 Адекватная топология для этого случая - компактно-открытая. Эта топология имеет в качестве предбазы : множество всех функций, которые переводят данное компактное множество К С I в данное открытое U С X.

12 Эта топология отождествляется с топологией равномерной сходимостью на компактах, когда X равномерное пространство.

13 Пространство предпочтений X – равномерное хаусдорфово топологическое пространство, например, метрическое и континуум индивидуумов описываемый единичным интервалом [0, 1], наделённым обычной топологией и Лебеговой мерой. C(C(0, 1)X обозначает множество простых отображений, т.е. отображения конечно определённые. Простое отображение может быть представлено так: $S = x_1 q_{1A1},\ldots x_n q_A$ ● Континуальное правило ЧиЧи на X есть отображение

14 $\Phi: L_{\infty}([0,1], X) \rightarrow X$

15 Удовлетворяющую следующим условиям:

16 (I) НЕПРЕРЫВНОСТЬ: ф непрерывна в топологии произведения X^n

17 (ii) АНОНИМНОСТЬ: Для любого конечного разбиения (E_i) отрезка (0,1), $\mu(E_i)=1/n$, (I =1,…,n) имеем ф($x_1,…,x_n$) = ф($x_{i1},…,x_{in}$) для любой перестановки (1,…,n).

18 (iii) УВАЖЕНИЕ СОГЛАСИЯ: ф(x,…,x) = x для каждого xЄX.

19 Топологическое агрегирование предпочтений в случае, когда множество агентов имеет любую мощность.

20 В качестве индексов участников рассмотрим точки обобщённого канторовского дисконтинуума $D^\mu = \Pi(0_i, 1_i)$, iЄμ, μ больше или равно c – мощность континуума. Как раньше, мы рассматриваем множество простых отображений f: $D^\mu \to (1, 0)$, т.е. разбиение D^μ на два непустых дизъюнктных открыто-замкнутых множества (в топологии Тихонова). Множество всех таких разбиений имеет мощность expexp (μ) и образует канторовский дисконтинуум веса exp (μ) и мощности expexp (μ), так как компактно-открытая топология на простых отображениях совпадает с тихоновской. Это происходит потому, что все пары этого разбиения образуют предбазу тихоновской топологии. Пусть

21 ф: $\Pi(D^{\mu i}, \mu_i = \mu, i Є \mu) \to D^\mu$

22 ретракция D^μ на диагональ произведения $\Pi(D^{\mu i}, \mu_i = \mu, iЄ\mu) =_{top} D^\mu$ непрерывная в тихоновской топологии. Тогда (1) выполнено по определению, (2) выполнено для любой конечной перестановки участников (доказательство позже), (3) УВАЖЕНИЕ СОГЛАСИЯ: ф(x,…,x) = x для каждого xЄ D^μ (Это доказывается предъявлением конкретной непрерывной в тихоновской топологии ретракции D^μ на свою диагональ).

23 *Замечание*. Пусть ω_1, ω_2, ω_3, …, возрастающая последовательность бесконечных кардинальных чисел, сходящаяся к числу ω_ω- первому предельному кардинальному числу ω_ω. Рассмотрим произведение

24 $D = \Pi D^{\omega i}=D^\mu$, если sup ($\omega_i$: iЄN) = ω_ω.

25 Можно доказать, что нельзя переставить местами точку, одна из координат которой является ω_i с точкой ω_ω. Таким образом, не любые перестановки участников возможны. Это даёт ограничение на равноправие участников и принцип «уважение согласия» не работает.

26 Счётно полные ультрафильтры и р-точки нароста (бета)N минус N стоун-чеховского расширения (бета) натуральных чисел N.

27 Напомним, что ультрафильтр U называется счётно полным, если для каждого подмножества (S_n: nЄω) C U, следует, что пересечение (S_n: nЄω) Є U. (Т.Йех, стр.50)

28 **Теорема**. Всякий счётно полный ультрафильтр U на множестве N натуральных чисел, рассматриваемых в дискретной топологии, соответствует однозначно р-точке нароста (бета)N минус N стоун-чеховского расширения N, к которой он сходится. Обозначим (бета)N через вN.

29 *Доказательство.* Заметим, что, если ультрафильтру U соответствуют, например, две точки x_1 и x_2 из вN-N, к которым он сходится, то существуют дизъюнктные окрестности Ox_1 и Ox_2 в вN такие, что замыкания (Ox_1)*и (Ox_2)* не пересекаются и содержат бесконечное множество точек вN – N. Так как вN экстремально несвязно, а вN-N компакт, то (Ox_1)*и (Ox_2)* не пустые, открытые и непересекающиеся множества, содержащие

предельные точки для U. Пусть, например, x_1‡ x_2 те самые точки. Тогда, так как (Ox_1)*и (Ox_2)* не пересекаются в вN-N, то x_1 и x_2 не являются р-точками, соответствующий ультрафильтр U не является счётно полным. Теорема доказана.

30 **Теорема**. Существует счётно аддитивный ультрафильтр U на N, принадлежащий границе Феллера счётного марковского процесса. Замечание. Впервые такие марковские процессы построил Г.Шоке (я уже писал об этом). Один из них он назвал «редким», а другой – «стремительным». Он доказал, что оба процесса принадлежат границе Феллера (ближней, если он принадлежит ей, дальней, если он не наблюдаемый). Заметим, что оба эти процесса не наблюдаемы, если они не принадлежат ближним границам. Доказательство потом.

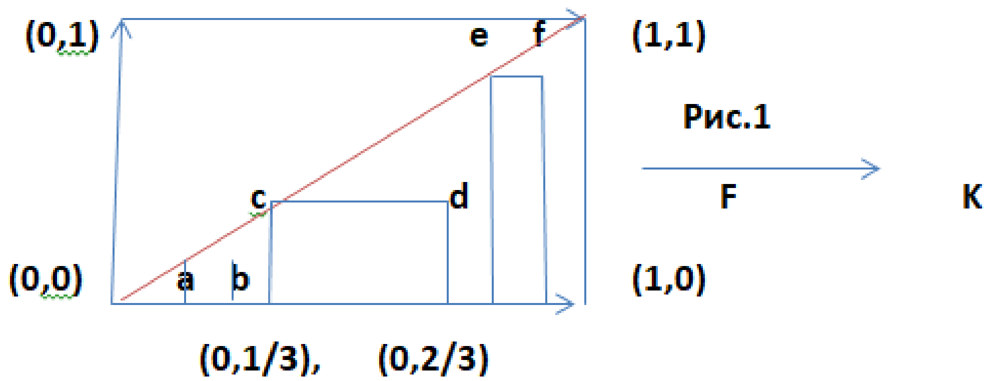
31 **Теорема.** Каждой дальней точке границе Феллера счётного марковского процесса соответствует бесконечный потенциал, который даёт оценку среднего времени сходимости процесса или попадания его в яму, в которой он остаётся навсегда.

32 Доказательство потом.

33 **Лестница Кантора.**

34 Непрерывное, неприводимое (т.е. любое собственное замкнутое подмножество не отображается на) отображение F канторова совершенного множества C на окружность K.

35



36 Описание отображения. Лестница Кантора – это ломанная линия с бесконечным множеством ступенек . В середине самая большая ступенька, справа и слева (a,b) и (e,f)-две поменьше. Само множество Кантора C лежит на отрезке (0,0), (0,1). Окружность K – это диагональ (выделена красным цветом) при условии, что точки (0,0) и (1,1) склеены. На каждом выброшенном интервале при его построении, отображение взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Все двоично – иррациональные точки (т.е. не представимые в виде $a/2^n$ ни при каком целом a) – остаются неподвижными. Таким образом, отображение F Неприводимо. Доказательство потом.

37 Подход Патрика Саппса к классической модели осциллятора (29 стр. 311).

38 Рассмотрим простейшую автономную колебательную систему, которая описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

39 $d^2E/dt^2 + q^2E = 0$, (1*) которое в физике описывает, так называемый, гармонический осциллятор (1). Вводя вспомогательные переменные $H = dE / dt$, $dH/dt = -q^2 E$ перейдём к нормальной системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентной (1*)

40 $dE/dt = H$, $dH/dt = -q^2E$ (2*) Общее решение этой системы представляется в виде

41 $E(t) = A\sin(qt + a)$ $H(t) = A\cos(qt + a)$ (3*)

42 И является периодическим решением динамической системы (3*)

43 Переходя к фазовому пространству (E,H), получим уравнения траекторий в этом пространстве – семейство эллипсов на плоскости

44 $E^2/A^2 + H^2/(qA)^2 = 1$ (4*)

45 П.Саппес и де Боррос предложили учитывать интерференцию при действии осциллятора.

46 Подробнее (22 и 23). Таким образом, в этой работе обычное поле

47 Бильярды Я.Г. Синая (24, Лекция 10)

48 Пусть Q ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с кусочно-гладкой границей. Я.Г.Синай называет бильярдом динамическую систему, порождённую равномерным прямолинейным движением материальной точки внутри Q с постоянной скоростью и с отражением на границе, при котором тангенциальная составляющая скорости остаётся неизменной, а нормальная составляющая меняет знак.

49 Фазовое пространство бильярда состоит из всевозможных наборов (q,v), где qЄQ, а v – вектор скорости, т.е. элемент единичной сферы к-мерного пространства. В таком случае q называется носителем точки x.

50 Меру в фазовом пространстве зададим в виде $d\mu = dqdp$, где dp – равномерное распределение на единичной сфере к-мерного пространства точек x = (q, v), имеющих носителем q. Мера μ конечна, и мы будим считать, что она нормирована.

51 Утверждение (Я.Г. Синай): Мера μ является инвариантной мерой бильярда.

52 В дальнейшем нас будет интересовать только движение бильярдного шара на прямоугольном столе без луз.

53 Утверждение (Я.Г. Синай) Мера μ в прямоугольном бильярде не является эргодической.

54 Для эргодичности движения на прямоугольнике необходимо и достаточно, чтобы тангенс соответствующего угла наклона на обмотке тора был иррационален (для квадрата). В книге (25) приводится множество полезных свойств прямоугольных бильярдов. Далее, по методу В.И. Арнольда «Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира, Квант, МЦНМО, 1998, №1,стр.1-7 рассматривается расслоение тора и его индексацию стационарными марковскими цепями. (Впрочем, вы можете посмотреть сами – журнал доступен по интернету). Переходя к прямоугольному бильярду Синая, а ещё точнее к прямоугольнику, правый верхний угол которого соответствует первому несчётному предельному кардиналу (замечание на стр.3) Рис.3

55

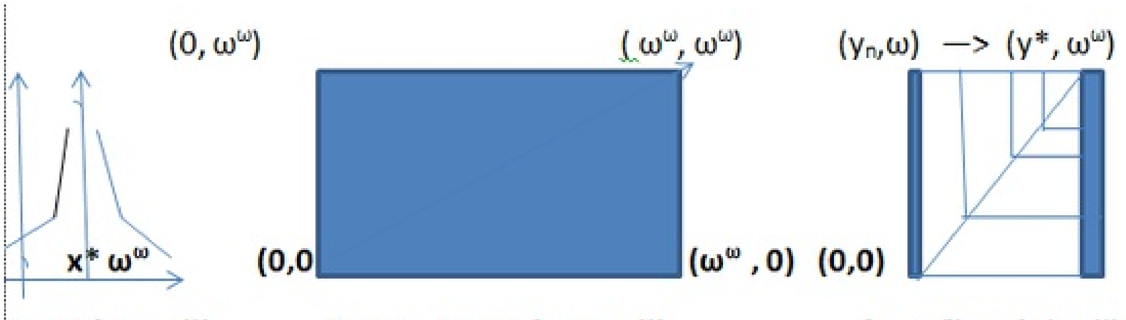


Рис.3 (левый) Рис. 3. Рис. 3 (правый)

56 На левом рисунке показан бесконечный потенциал в точке (x^*,ω^ω), который описывает силу притяжения к равновесному состоянию (x^*,ω^ω) , в гауссовом случайном процессе на прямой.

57 Этот прямоугольник M рассматривается в обычной топологии плоскости и содержит внутри себя всюду плотное подмножество M_1 , состоящее из точек, характер которых строго меньше ω^ω, в то время как точки верхней и правой границы имеют характер равный ω^ω . (Напоминаю, что характером точки в топологии называется минимальная мощность базы окрестностей этой точки). Разумеется, такая ситуация на плоскости возможна, если предположение $\omega^\omega < 2^\omega$ непротиворечиво и совместимо. Как показал Йех, такое возможно, если существуют счётно полные ультрафильтры на N. В начале этой работы я показал, что если граница Феллера существует и не наблюдаема, то соответствующая ей точка из вN-N является p-точкой. Таким образом, счётно полный ультрафильтр существует и гипотеза $\omega^\omega < 2^\omega$ непротиворечива. На Рис.3 (правый) показан, так называемый, спектр компакта – распределение характеров его точек по областям. Таким образом, получаем убывающую последовательность (счётную) множеств X_n (квадратов) такую, что характер каждой точки которой не меньше ω_n и, соответственно, получаем убывающую последовательность $У_n$ (углов) такую, что характер каждой точки которого не больше ω_n. Легко видеть, что характер каждой точки самого большого угла не больше ω_1. Можно считать, что точка (0,0) изолирована, т.е. имеет характер 1.

58 Далее, сворачиваем прямоугольник в двумерный тор и рассматриваем какую-нибудь невырожденную динамическую систему на этом торе. Далее, кодируем её каким-нибудь стационарным марковским процессом: на каждой траектории выбираем значение x_n с наименьшим номером попавшим на эту траекторию. Ясно, что траекторию до x_n можно не рассматривать, так как её предел определяется только x_n . Так как x_n сходится к предельному состоянию x* марковского процесса, то существует окрестность Ox* такая, что вне этой окрестности лежит конечное множество таких точек. Выбросив их получим, что все оставшиеся проголосуют так, как голосует предельный участник.

59 Возвращаясь к замечанию на стр.3, видно, что появились возможности реализовать в этой модели некоторое подобие свойства ЕДИНОДУШИЯ. Например, для любой траектории и любом значении марковского процесса x на ней – всю траекторию до x можно выбросить и единодушие не изменится.

60 Однако, возникает подозрение, что «платой» за выполнение принципа ЕДИНОДУШИЯ будет появление невидимого диктатора.

References:

1. Yu.N. Gavrilets, B.A.Efimov, Izmenenie predpochtenij individov v sotsial'noj srede. EhMM, t.33 №2, 1997, str.76-93.

2. Yu.N. Gavrilets, B.A.Efimov , Teoretiko- igrovaya model' formirovaniya ustanovok individov v referentnoj gruppe. EhMM, t36, №1,2000, str. 116-126.

3. B.A.Efimov, Stokhasticheskie modeli formirovaniya ustanovok individov v sotsial'noj srede, Sb. «Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie sotsial'no-ehkonomicheskikh protsessov» (red. prof. Yu.N. Gavrilets) vyp.2, TsEhMI, M., 2001, str. 23-45.

4. Yu.N. Gavrilets, B.A.Efimov , Vliyanie nalichiya struktury mezhlichnostnykh svyazej v referentnoj gruppe na formirovaniya individual'nykh ustanovok v nej. Sb. «Matematicheskoe modelirovanie sotsial'nykh protsessov», (red. A.A. Samarskij i dr.) vyp. 4, MGU, M., 2002, str. 20-27.

5. B.A.Efimov, U.Kh. Malkov, Formirovanie ustanovok individov pri ikh nelinejnom vzaimodejstvii, Sb. Matematicheskoe modelirovanie sotsial'nykh protsessov», (red. A.A. Samarskij i dr.) vyp. 5, MGU, M., 2003, str. 58-84.

6. B.A.Efimov, O vliyanii izmereniya ustanovok individov na protsess ikh formirovaniya v sotsial'no-psikhologicheskikh polyakh. Sb. «Matematicheskoe modelirovanie sotsial'nykh protsessov», (red. A.P. Mikhajlov i V.A.Shvedovskij), vyp.8 MGU, M., 2006, str.93-112.

7. B.A.Efimov, G.G.Pirogov, Matematicheskie modeli sotsial'no-ehkonomicheskoj spravedlivosti: povedencheskij podkhod. (Soobschenie na Tret'em Sotsiologicheskom Kongresse v Moskve, 2006) Opublikovano v

8. Sb. «Matematicheskoe modelirovanie sotsial'nykh protsessov», (red. A.P. Mikhajlov i V.A.Shvedovskij), vyp.8 MGU, M., 2006, str.84-86.

9. A.A. Gusejnov, V.I. Zhukovskij, K.N. Kudryavtsev, Matematicheskie osnovy zolotogo pravila nravstvennosti, URSS, Moskva, 2016.

10. Kemen' Dzh, Tomson Dzh. , Vliyanie psikhologicheskogo otnosheniya (ustanovki) na iskhody igr. Sb. «Matrichnye igry» (red. N.N. Vorob'yov), str.221-253, Fizmatgiz, M. 1961

11. Valerij Vasil'ev, «A-ravnovesie i nechyotkoe A-yadro v modeli chistogo obmena s ehksternaliyami», Matem. Teoriya igr i eyo prilozheniya, t. 7, №1, 2015, str. 15-31.

12. I.Kh. Ibragimov, Gruppovoj analiz obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij i printsip invariantnosti v matematicheskoj fizike, UMN tom 47 (1992), vyp.4 str.83-144.

13. I.Kh. Ibragimov, Azbuka gruppovogo analiza. «Matematika, kibernetika» Novoe v nauke, «Znanie», 1989, №8.

14. B.A.Efimov, Nepreryvnye pravila agregirovaniya lokal'nykh predpochtenij individov, EhMM, 1989, t. 25, №2 str. 299-313.

15. B.A.Efimov, O paradokse nepreryvnogo gruppovogo vybora, Sb. «Prinyatie reshenij i analiz ehkspertnoj informatsii» (red. B.G. Litvak), Voprosy kibernetiki, vyp.151, GKNT. M.,1989 s. 41-59.

16. Luc Lauwers, Topological manipulators form an ultrafilter, Soc. Choice Welfare, (2004) v 22, p. 437-445.

17. Luc Lauwers , Topological aggregation, the case of an infinite population “Topological Social Choice” (ed. G.M. Heal), Springer, 1997 p.173

18. Candeal J., Chichilnisky G., Indurain E., Topological aggregation of preferences: the case of a continuum of agents Topological Social Choice” (ed. G.M. Heal), Springer, 1997 p.187

19. Mehta P. Topological methods in social choice: an overview, Topological Social Choice” (ed. G.M. Heal), Springer, 1997 p.87

20. I.G. Kaplan, Mezhmolekulyarnye vzaimodejstviya. Fizicheskaya interpretatsiya, komp'yuternye raschyoty i model'nye potentsialy, Izdatel'stvo BINOM, Laboratoriya znanij, M., 2012.

21. Potentsial Lennard-Dzhonsa (Vikipediya) – model' parnogo vzaimodejstviya nepolyarnykh molekul.

22. Patrick Suppes and J.A. de Barros, Photons, Billiards and chaos, in P.Weingartner and G.Schurz (Eds), Law and Prediction in the Ligh of Chaos Research, Lecture Notes in Physics, Berlin, Springer, 1996

23. Patrick Suppes and J.A. de Barros, A random walk approach to interference, Intern. Journal of Theor. Physics 33, 179-189, (1994).

24. Yakov Sinaj, Bil'yardy, Vvedenie v ehrgodicheskuyu teoriyu, Fazis, M., 1996, (Lektsiya 10).

25. G.A. Gal'perin, A.N. Zemlyakov, Matematicheskie bil'yardy, «Kvant», vyp. 77, «Nauka», M., 1990.

26. T. Jekh, Teoriya mnozhestv i metod forsinga, «Mir», Moskva, 1973.

27. I. Juhasz and other, Cardinal functions in topology, Math. Centre Tracts, v34, Amsterdam, 1971.

28. I. Juhasz, Cardinal functions in topology - ten years later, Math. Centre Tracts, v123, Amsterdam, 1980.

29. J. A. de Barros and Patrick Suppes, Quantum mechanics, interference and the brain, Journal of Mathematical Psychology, 53 (2009) 306-313.

30. B.A.Efimov, O periodicheskikh resheniyakh dinamicheskikh sistem, svyazannykh s ravnovesiem po Nehshu beskoalitsionnykh igr. Sb. «Analiz i modelirovanie ehkonomicheskikh protsessov» (red. V.Z.Belen'kij) vyp. 10 (2013) str.97-110.

31. J. C. Candeal, G. Chichilnisky, E. Indurain, Topological aggregation of preferences: the case of a continuum of agents, Topological Social Choice (ed. G. M. Heal), Springer, 1997.

32. Luc Lauwers, Continuity and equity with infinite horizons, Topological Social Choice (ed. G. M. Heal), Springer, 1997.

33. Luc Lauwers, A note on weak ?-Chichilnisky rules , , Topological Social Choice (ed. G. M. Heal), Springer, 1997.

34. Luc Lauwers, Topological Social Choice, Center for Economic Studies, Leuven, Preprint No PIMS-99-2

35. A. Pelchinskij, Linejnye prodolzheniya, linejnye usredneniya i ikh primeneniya k linejnoj

topologicheskoj klassifikatsii prostranstv nepreryvnykh funktsij. «MIR», M., 1970

Динамические системы в теории принятия решений с бесконечным множеством участников

Ефимов Б. А.
Центральный экономико-математический институт РАН
Москва, Нахимовский проспект 47

Аннотация

В статье рассматриваются динамические системы в теории принятия решений для любого множества участников. Показано, что существенную роль при этом играет Аксиома Мартина из теории множеств, которая совместима с аксиомой выбора. Показано, что ключевое значение имеет теория линейных продолжений и усреднений Милютина для построения правил топологического среднего Чичильницкой для любого множества участников.

Ключевые слова: Аксиома Мартина, Линейные операторы продолжения и усреднения, Топологический социальный выбор, бесконечные потенциалы, Марковские цепи, Наблюдаемые и не наблюдаемые состояния на границе Феллера стационарной марковской цепи

Дата публикации: 03.02.2019

Ссылка для цитирования:

Ефимов Б. А. Динамические системы в теории принятия решений с бесконечным множеством участников // Вестник ЦЭМИ РАН. 2018. Выпуск 4 [Электронный ресурс]. Доступ для зарегистрированных пользователей. URL: https://cemi.jes.su/s265838870000170-0-1/ (дата обращения: 17.02.2020). DOI: 10.33276/S0000170-0-1
