Вестник ЦЭМИ РАН. 2018-2023

ISSN 2658--3887

URL - <http://cemi.jes.su>

Все права защищены

Выпуск 3 Том 1. 2018

Об обработке матриц парных сравнений

Заславский Алексей Александрович

Центральный экономико-математический институт РАН

Москва, Нахимовский проспект, 47

Аннотация

Одной из традиционных задач обработки парных сравнений является построение транзитивной матрицы, ближайшей к данной. В вычислительном отношении эта задача является весьма трудной. В работе требование транзитивности заменяется более слабым требованием правильности матрицы и предлагается алгоритм аппроксимации данной матрицы парных сравнений правильной матрицей. Эффективность предложенного алгоритма подтверждается вычислительными экспериментами.

Ключевые слова: Парные сравнения, транзитивность, правильность, матрица расстояний, аппроксимация.

Дата публикации: 12.01.2019

Ссылка для цитирования:

Заславский А. А. Об обработке матриц парных сравнений // Вестник ЦЭМИ РАН. – 2018. – Т. 1. – Выпуск 3. URL: <https://cemi.jes.su/s265838870000138-4-1/>. DOI: 10.33276/S0000138-4-1

¹ Парные сравнения (Дэвид, 1978, с.8) являются одним из видов экспертных оценок иприменяться они начали раньше остальных видов оценок. Поэтому в настоящее время разработано множество алгоритмов анализа парных сравнений (Пригарина, Чеботарев, 1989, с.18), в том числе статистические методики, процедуры, использующие различные меры близости, подходы теории группового выбора и т.д.

2 Будем рассматривать парные сравнения n объектов с ничьими: эксперту предъявляются все пары объектов, он их попарно сравнивает и сообщает какой из двух объектов предпочтительнее или объявляет их равноценными. Результаты сравнений будем записывать в матрицу x (без диагональных элементов). Если эксперт предпочел объект i объекту j , то $x_{ij}=1$ и $x_{ji}=0$, а если объекты равноценны, то $x_{ij}=x_{ji}=1/2$. Таким образом, для любых различных i и j имеем $x_{ij}+x_{ji}=1$. Для каждого объекта найдем сумму набранных им очков: $s_i = \sum_{j \neq i} x_{ij}$. Будем считать объекты упорядоченными по возрастанию этих сумм, т.е. $s_1 \leq \dots \leq s_n$.

3 Вообще говоря, ответы эксперта могут содержать противоречия, т.е. для некоторых объектов $i_1, \dots, i_m$ может оказаться, что $x_{i_1 i_2} \geq 1/2, x_{i_2 i_3} \geq 1/2, \dots, x_{i_{m-1} i_m} \geq 1/2, x_{i_m i_1} \geq 1/2$, причем среди этих неравенств есть строгие. Можно показать (Заславский, Френкин, 2009, с.8), что в матрице x обязательно найдется подматрица 3×3 одного из видов:

4

$$Y_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

5 Если x не содержит таких подматриц, то объекты можно разбить на несколько классов, причем эксперт объекты из одного класса считает равноценными, а объект из класса с большим номером предпочитает объекту из класса с меньшим номером. Такие матрицы будем называть *транзитивными*.

6 В практических экспертизах, как правило, ответ на поставленный вопрос дают несколько экспертов, после чего их мнения агрегируются. Получение агрегированного мнения является достаточно сложной математической задачей, для решения которой разработано множество методов. Большинство из этих методов основаны на введении некоторой меры близости d между ответами экспертов и нахождении матрицы $\hat{x}$, минимизирующей сумму $\sum_{i=1}^N d(\hat{x}, X^i)$, где $X^1, \dots, X^N$ — матрицы, полученные от различных экспертов. В частности, в методе парных сравнений часто применяется метрика Хемминга (Кемени, Снелл, 1972, с.21). При ее использовании матрица $\hat{x}$ определяется по правилу большинства:

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l > \sum_{l=1}^N x_{ji}^l, \\ 1/2 & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l = \sum_{l=1}^N x_{ji}^l, \\ 0, & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l < \sum_{l=1}^N x_{ji}^l. \end{cases}$$

⁸ Известно, что матрица $\tilde{x}$ может оказаться нетранзитивной даже при транзитивных $x^1, \dots, x^N$. Поэтому, если результат экспертизы должен быть транзитивным, возникает задача определения транзитивной матрицы, ближайшей к $\tilde{x}$. В случае использования в качестве меры близости метрики Хемминга эта задача оказывается в вычислительном отношении весьма сложной. Один из алгоритмов ее решения приведен в (Гильбурд, 1988). Предложенный в работе (Заславский, 2007) альтернативный геометрический подход основан на следующем результате.

⁹ **Теорема 1.** *Сопоставим каждой возможной матрице парных сравнений точку n -мерного пространства с координатами $(s_1, \dots, s_n)$ и рассмотрим выпуклую оболочку M таких точек. Тогда транзитивным матрицам соответствуют вершины многогранника M .*

¹⁰ Геометрический алгоритм построения транзитивной матрицы, ближайшей к данной описывается в работе (Заславский, Шевлякова, 2010). Его эффективность подтверждена вычислительными экспериментами.

¹¹ Требование транзитивности матрицы парных сравнений представляется слишком жестким. Действительно, представим, что у нас есть n предметов различной массы и чашечные весы с некоторым порогом чувствительности, т.е. их чашки остаются в равновесии, если массы положенных на них предметов отличаются меньше, чем на критическое значение. Если взвесить каждую пару предметов и составить из результатов взвешиваний матрицу, в ней вполне могут оказаться подматрицы, равные $\frac{1}{2}$ (если разности весов первого и второго, а также второго и третьего предметов меньше порога, но разность весов первого и третьего больше). Очевидно, что полученная матрица обладает свойством: если $s_i \geq s_j$, то для любого k , отличного от i, j , $x_{ik} \geq x_{jk}$. Назовем такую матрицу *правильной*. В (Заславский, Френкин, с.9) доказана следующая теорема.

¹² **Теорема 2.** *Матрица x является правильной тогда и только тогда, когда она не содержит подматриц, равных Y_1, Y_2 а также подматриц 4×4 вида*

$$Z_1 = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

14 Другое условие равносильное правильности матрицы сформулировано в работе (Заславский, 2014).

15 Построим по данной матрице x матрицу D расстояний между ее строками, элементы которой вычисляются по формуле $d_i = \sum_{k=1}^n |x_{ik} - x_{jk}|$ (диагональные элементы матрицы x предполагаются равными $1/2$). Нетрудно убедиться, что верна следующая теорема.

16 **Теорема 3.** Для любой матрицы x и любых x, j имеет место неравенство

17 $d_{ij} \geq |s_i - s_j|. \quad (1)$

18 Матрица x является правильной тогда и только тогда, когда все неравенства (1) обращаются в равенства.

19 Из теоремы 3 следует, что правильность матрицы равносильна условию $NP = \sum_{i < j} (d_{ij} - s_j + s_i) = 0$ (напоминаем, что мы считаем объекты упорядоченными по возрастанию s_j).

20 В работе (Балябин, Заславский, 2018) предложен следующий алгоритм построения по данной матрице ближайшей к ней в некоторой метрике матрицы, удовлетворяющей условию $NP=0$. Пусть дана некоторая матрица парных сравнений x . Будем искать правильную матрицу x , минимизирующую величину $d(X, \bar{X})$, где d — некоторая метрика, например $d(X, Y) = \sum_{i,j} |x_{ij} - y_{ij}|$. Для этого возьмем некоторую правильную матрицу X_0 и найдем в ней пару элементов $x_{ij}, x_{ji}, i < j$, которые можно изменить, сохранив правильность матрицы и уменьшив расстояние $d(X_0, \bar{X})$. Этот поиск можно осуществлять, либо проверяя возможность изменения для произвольной пары элементов, либо определив заранее список элементов, изменение которых не нарушает условия правильности. Нетрудно убедиться, что для матрицы, строки которой упорядочены по возрастанию s_j такие элементы должны удовлетворять одному из условий:

21 $-x_{ij} = 1/2, x_{i+1,j} = x_{i,j+1} = 0$; новые значения $x_{ij} = 0, x_{ji} = 1$; $-x_{ij} = 0, x_{i,j+1} = x_{i+1,j} = 1/2$; новые значения $x_{ij} = x_{ji} = 1/2$.

22 Описанная операция применяется до тех пор, пока возможно уменьшить расстояние до $\approx$ либо пока это расстояние не станет меньше заданного порогового значения. В качестве начальной правильной матрицы можно брать матрицу, все элементы которой равны $1/2$, транзитивную матрицу без ничьих или транзитивную матрицу, ближайшую к $\approx$, построенную алгоритмом, описанным в (Заславский, Шевлякова, 2010).

Следует отметить, что, в отличие от задачи поиска транзитивной матрицы, теоретическое обоснование эффективности предложенного алгоритма отсутствует. Однако, приведенные в (Балябин, Заславский, 2018) результаты вычислительных экспериментов позволяют сделать вывод о возможности его применения для аппроксимации матриц парных сравнений правильными матрицами.

Библиография:

1. Балябин В.А., Заславский А.А. (2018) Построение правильных матриц парных сравнений. результаты вычислительного эксперимента// Экономика и математические методы. Т. 54, № 1, с. 120–124.
2. Гильбурд М. М. (1988). Об эвристических методах построения медианы в задачах группового выбора// Автоматика и телемеханика. № 7. С.131—136.
3. Дэвид Г. (1978). Метод парных сравнений. М.: Статистика.
4. Заславский А.А. (2007). Геометрия парных сравнений// Автоматика и телемеханика. № 3. С. 181—186.
5. Заславский А.А. (2014). Новые подходы к анализу парных сравнений// Экономика и математические методы. Т.50. № 3. С. 130—133.
6. Заславский А.А., Френкин Б.Р. (2009). Математика турниров. М.: МЦНМО.
7. Заславский А.А., Шевлякова А.Н. (2010). Геометрический метод анализа парных сравнений. Результаты вычислительного эксперимента// Вестник МЭИ. № 6. С. 5—12.
8. Кемени Дж., Снелл Дж. (1972). Кибернетическое моделирование. М.: Советское радио.
9. Пригарина Т.А., Чеботарев П.Ю. (1989). Методы экспертных оценок на примере определения предпочтительности оценок. Препринт. М.: ЦЭМИ.

About the handling of matrices of pairwise comparisons

Aleksey Zaslavskiy

CEMI RAS

Moscow, Nachimovky prospect 47

Abstract

The construction of transitive matrix closest to the given one is a traditional problem of paired comparisons analysis. In the give paper the condition of transitivity is replaced by weaker condition of regularity. An algorithm for approximation of given pair-comparisons matrix by a regular matrix is proposed. Its effectiveness is confirmed by the results of calculating experiments.

Keywords: Paired comparisons, transitivity, regularity, distances matrix, approximation

Date of publication: 12.01.2019

Citation link:

Zaslavskiy A. About the handling of matrices of pairwise comparisons // Herald of CEMI. – 2018. – V. 1. – Issue 3. URL: <https://cemi.jes.su/s265838870000138-4-1/>. DOI: 10.33276/S0000138-4-1