Herald of CEMI. 2013-2020

ISSN 2658--3887

URL - http://cemi.jes.su

Issue 2 Volume . 2018

Conditional lognormal model of zero-coupon bond

R. Bogomolov
CEMI RAS
Russian Federation, Moscow, Nachimovky prospect 47

Abstract

The report is devoted to construction of stochastic one-factor evolutional model for zero-coupon bond in discrete time. As the base sequence it was used a Gaussian random walk. It is shown that in case of observing not only the previous values of wandering, but his condition the last time it is Marko. Based on these facts, the article describes a stochastic model of zero-coupon bonds. For this model of bond were also find explicit formulas of its volatility, temporal structure of interest rates.

Keywords list (en): zero-coupon bond model, gaussian random walk, interest rate, filtration, discount sequence

Date of publication: 13.12.2018

Citation link:

Bogomolov R. Conditional lognormal model of zero-coupon bond // Herald of CEMI. 2018. Issue 2 [Electronic resource]. Access for registered users. URL: https://cemi.jes.su/s111111110000101-4-1/ (circulation date: 28.09.2020). DOI: 10.33276/S0000101-4-1

1 1. Введение. Доклад посвящен построению условной логнормальной модели бескупонной облигации, описывающей эволюцию её стоимости в дискретном времени.

2 К настоящему моменту времени предложено большое количество математических моделей бескупонных облигаций с непрерывным временем. Их подробное описание содержится в [1].

3 Описание различных моделей бескупонных облигаций в дискретном времени можно найти в [2-5]

4 В отличии от выше указанных работ, в основе доклада лежит соображение о том, что наблюдению доступны в каждый момент времени не только значение цены облигации, но и её номинал.

5 2. Расширенная фильтрация. Представление гауссовского случайного блуждания относительно расширенной фильтрации. Пусть на стохастическом базисе$\left(\Omega, \mathrm{F}, (F_t)_{t \in N_0}, P\right)$, где $N_0 = \{0, \ldots, T\}$, задана согласованная, гауссовская марковская последовательность$(H_t, F_t)_{t \in N_0}$.

6

$$H_t = H_0 + at + \sigma \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

(1)

7 где$a, \sigma \in R^1$, $\forall t \in N_0$, H_0 - гауссовская случайная величина$Law(H_0) = N(m_0, \gamma_0)$, $\{\varepsilon_t\}_{t \in N_0}$ - гауссовская последовательность, ε_i- независимые одинаково распределенные случайны величины$i \in N_0$, причём$Law(\varepsilon_i) = N(0,1)$.

8 Без ограничения общности можно считать, что$F_t = \sigma\{H_0, \ldots, H_t\}$. Обозначим$\overline{F}_t \overset{\Delta}{=} \sigma\{H_0, \ldots, H_t, H_T\}$, $\overline{F}_{\{t\}} \overset{\Delta}{=} \sigma\{H_t, H_T\}$.

9 Очевидно, что семейство σ - алгебр$\{\overline{F}_t\}_{t \in N_0}$ является фильтрацией. $\overline{F}_t$является расширением фильтрации F_t. Ясно, что H_t - $\overline{F}_t$ и $\overline{F}_{\{t\}}$ - измеримо.

10 Обозначим $P(H_{t+s} \in B | \overline{F}_t)$ и $P(H_{t+s} \in B | \overline{F}_{\{t\}})$ - условные вероятности относительно σ - алгебр $\overline{F}_t$ и $\overline{F}_{\{t\}}$, где B - борелевское множество, $B \subseteq R^1$, а $t \in N_0$ и$t+s \in N_0$. Почти очевидно следующее утверждение.

11 <u>Утверждение 1.</u> $P(H_{t+s} \in B | \overline{F}_t) = P(H_{t+s} \in B | \overline{F}_{\{t\}})$ Р-п.н. Из утверждения 1 следует, что последовательность $\left(H_t, \overline{F}_t\right)_{t \in \{0, \ldots, N-t\}}$ относительно фильтрации $\overline{F}_t$ обладает марковским свойством.

12 Из теоремы о нормальной корреляции [6] следует, что условная вероятность $P(H_{t+s} \in B | \overline{F}_{\{t\}})$ имеет гауссовское распределение, т.е$Law\left(H_{t+s} | \overline{F}_{\{t\}}\right) = N(\mu_{t+s}, \gamma_{t+s})$, где $\mu_{t+s} = E\left(H_{t+s} | \overline{F}_{\{t\}}\right)$ - условное математическое ожидание, а $\gamma_{t+s} = E\left[(H_{t+s} - \mu_{t+s}) | \overline{F}_{\{t\}}\right]$ - условная дисперсия.

13 Следующее утверждение устанавливает их явный вид.

14 <u>Утверждение 2.</u> Пусть *t=0*. Тогда справедливы следующие утверждения

15

$$\mu_S = \frac{H_0(T-S)}{T} + H_T \frac{S}{T}$$

16 $\gamma_S = \sigma^2 \frac{(T-S)S}{T}$;

существует последовательность независимых случайных величин $\{\tilde{\varepsilon}_t\}_{t\in\{1,\dots,T-1\}}$ с $Law\left(\tilde{\varepsilon}_t \middle| \overline{F_{\{0\}}}\right) = N(0;1)$ такие, что для любого $t \in \{0,\dots,T-1\}$

17 $\left(H_t, \overline{F}_0\right)_{t\in\{1,\dots,T\}}$ допускает представление

18

$$H_t = H_0 \frac{(T-t)}{T} + H_T \frac{t}{T} + \sigma \sqrt{\frac{(T-t)t}{T}} \tilde{\varepsilon}_t$$

(2)

19 <u>Замечание.</u> Очевидно, что:

20 $H_t\big|_{t=0} = H_0$, $H_t\big|_{t=T} = H_T$,

21

$$\gamma_t\big|_{t=0} = \gamma_t\big|_{t=T} = 0$$

22 3. Основываясь на утверждении 2 легко описать математическую модель бескупонной облигации и установить её свойства. Для этого достаточно положить $H_t = ln\ S_t$. Тогда из следует, что для $\forall t \in N_0$ S_t допускает представление

23

$$\frac{S_t}{S_0} = \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{\frac{t}{T}} \exp\left\{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)t}{T}} \tilde{\varepsilon}_t\right\}$$

(3)

24 Параметрам, фигурирующим в можно придать следующий смысл: S_T - это номинал облигации. S_0 - её начальная стоимость, а T - момент её погашения. $\sigma\sqrt{\frac{(T-t)t}{T}}$ - эволюция изменчивости стоимости облигации, причём $0<\sigma$ - константа.

25 С помощью можно установить явный вид доходности облигации к погашению, обозначаемой через Y_t, $t\in N_0$.

26 Известно [7], что

27

$$Y_t \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{S_T}{S_t}\right)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

(4)

28 Тогда с учётом примет вид

29

$$Y_t = \begin{cases} \left(\frac{S_N}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1, \text{ при } t = 0 \\ \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \exp\left\{-\sigma\sqrt{\frac{t}{T(T-t)}}\varepsilon_t\right\}, \text{ при t} \in \{1,\ldots,T-1\} \\ 0, \text{ при t=T} \end{cases}$$

30 Следовательно, ожидаемое значение доходности *E (Yt* | S_0, S_N) будет иметь вид

31

$$E\left(Y_t \middle| S_0, S_T\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{S_N}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1, \text{ при } t = 0 \\ \left(\dfrac{S_T}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \exp\left\{\sigma^2 \dfrac{t}{T(T-t)}\right\}, \text{ при } t \in \{1, \dots, T-1\} \\ 0, \text{ при } t=T \end{cases}$$

32 4. В этом пункте приводим вид дисконтирующей последовательности, относительно которой рассматриваемый рынок является эффективным [2]. Пусть $\{d_t\}_{t \in N_0}$ - последовательность, которая допускает представление

33 $d_t = \left(\dfrac{S_N}{S_0}\right)^{\frac{t}{T}} \exp\left\{\dfrac{\sigma^2}{2} \dfrac{(T-t)t}{T}\right\}$.

34 Очевидно, что для любого $t \in N_0$ случайная величина d_t - $\overline{F}_0$ - измерима. Тогда отношение $\frac{S_t}{d_t}$ допускает представление

35

$$\frac{S_t}{d_t} = S_0 \exp\left\{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)t}{T}} \tilde{\varepsilon}_t - \frac{\sigma^2}{2} \frac{(T-t)t}{T}\right\}$$

36 Стало быть $E\left(\frac{S_t}{d_t} \middle| \overline{F}_0\right) = S_0$, поскольку $E\left(\exp\left\{\sigma \sqrt{\frac{(T-t)t}{T}} \tilde{\varepsilon}_t - \frac{\sigma^2}{2} \frac{(T-t)t}{T} \middle| \overline{F}_0\right\}\right) = 1$

References:

1. Andersen L.B.G, Piterbarg V.V Interest Rate modeling - Atlantic Financial Press, 2010. - V. 1-3.

2. Shiryaev A. N. Osnovy stokhasticheskoj finansovoj matematiki. - Moskva : Fazis, 2004. - T. 1.

3. Pandzher Kh. i dr.: Finansovaya ehkonomika - Moskva : Yanus, 2005.

4. Medvedev G. A. Matematicheskie modeli finansovykh riskov. - 2003. - T 1.

5. Ho T.S.Y., Lee S. Term structure Movement and Pricing Interest Rate Contingent Claims: Journal of Finance, 1986. - Vol. 41 : pp. 1011-1029

6. Shiryaev A. N. Veroyatnost' . - Moskva : Nauka, 1989.

7. Khall D. Optsiony, f'yuchersy i drugie proizvodnye finansovye instrumenty : Vil'yams, 2008.

Условная логнормальная модель бескупонной облигации

Богомолов Р. О.
Центральный экономико-математический институт РАН
Российская Федерация, Москва, Нахимовский проспект, 47

Аннотация

Доклад посвящен построению стохастической модели, описывающей эволюцию стоимости бескупонной облигации в дискретном времени. В качестве базовой последовательности использовано гауссовское случайное блуждание. Показано, что при условии наблюдения не только предыдущих значений блуждания, но и его состояния в последний момент времени оно является марковской. Основываясь на этих фактах, в статье описана стохастическая модель бескупонной облигации. Для предложенной модели облигации найдены явный вид ее волатильности, временной структуры процентных ставок.

Ключевые слова: модель бескупонной облигации, гауссовское случайное блуждание, доходность, фильтрация, дисконтирующая последовательность

Дата публикации: 13.12.2018

Ссылка для цитирования:

Богомолов Р. О. Условная логнормальная модель бескупонной облигации // Вестник ЦЭМИ РАН. 2018. Выпуск 2 [Электронный ресурс]. Доступ для зарегистрированных пользователей. URL: https://cemi.jes.su/s111111110000101-4-1/ (дата обращения: 28.09.2020). DOI: 10.33276/S0000101-4-1
