Вестник ЦЭМИ РАН. 2018-2023

ISSN 2658--3887

URL - <http://cemi.jes.su>

Все права защищены

Выпуск 3 Том 1. 2018

Метод Лемке–Хаусона для решения конечных бескоалиционных игр трех лиц в частной постановке

Малков Устав Херманович

Центральный экономико-математический институт РАН

Российская Федерация, Москва, 117485, Россия, г. Москва, ул. Волгина, д.13, кв.77

Соколов Николай Александрович

Центральный экономико-математический институт РАН

Российская Федерация, Москва, 119296, Россия, г. Москва, ул. Молодежная, д.4, кв.227

Аннотация

Как показали проведенные ранее численные эксперименты, конкуренцию 2LP-методу может составить метод Лемке–Хаусона (ЛН-метод), успешно решающий биматричные игры. К сожалению, ЛН-метод не может быть применен к решению произвольных игр трех лиц (в общей постановке). Тем не менее, нам удалось приспособить метод Лемке–Хаусона к решению некоторого подмножества игр трех лиц (в частной постановке – гексаматричные игры). Проведено численное тестирование ЛН-метода решения гексаматричных игр, выявившее его достоинства и недостатки.

Ключевые слова: биматричная игра, гексаматричная игра, функция Нэша, точка равновесия, приближенный метод решения игры, метод Лемке–Хаусона, методы 2LP и 3LP, численные эксперименты

Дата публикации: 12.01.2019

Ссылка для цитирования:

Малков У. Х. , Соколов Н. А. Метод Лемке–Хаусона для решения конечных бескоалиционных игр трех лиц в частной постановке // Вестник ЦЭМИ РАН. –

1

1. Введение

2 Интерес к играм трех лиц в частной постановке был обусловлен желанием
выяснить, как специфика игры влияет на эффективность 3LP-метода. Кроме того,
хотелось определить, возможно ли применение ЛН-метода для решения некоторых
игр трех лиц. Оказалось, что это можно сделать для так называемых
гексаматричных игр.

3 Гексаматричная игра (или полиматричная игра трех лиц) – частный случай
конечной бескоалиционной игры трех лиц, поэтому поиск ее решения может быть
осуществлен любым эффективным методом, например, приближенным методом
3LP решения конечной бескоалиционной игры трех лиц [1], вычислительная
эффективность которого проверена тестированием [2]. А можно воспользоваться
спецификой игры и применить метод, хорошо зарекомендовавший себя при
решении биматричных игр, но заведомо не применимый для игры трех лиц в
общей постановке. Речь пойдет о методе Лемке–Хаусона (ЛН) [3], который нам
удалось успешно приспособить для гексаматричных игр.

4

2. Гексаматричная игра

5 Гексаматричная игра Γ [6] как конечная бескоалиционная игра трех лиц
определяется тремя множествами X, Y, Z стратегий первого, второго и третьего
игроков,

6

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbf{E}^m: x^T e_m = 1, x \geq o_m\},$$

7

$$Y = \{y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbf{E}^n: y^T e_n = 1, y \geq o_n\},$$

8

$$Z = \{z = (z_1, \dots, z_l)^T \in \mathbf{E}^l: z^T e_l = 1, z \geq o_l\},$$

9 и тремя функциями их выигрышей, определяемыми шестью матрицами (с
положительными элементами)

10

$$A_1 = (a_{1,ij}), A_2 = (a_{2,ik}), B_1 = (b_{1,ji}),$$

11

$$B_2 = (b_{2,jk}), C_1 = (c_{1,ki}), C_2 = (c_{2,kj}),$$

12

для всех $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l$, т.е. функции выигрышей игроков

13

$$f_x(\omega) = x^T(A_1 y + A_2 z), f_y(\omega) = y^T(B_1 x + B_2 z), f_z(\omega) = z^T(C_1 x + C_2 y).$$

14

Здесь и далее: вектор $\omega^T = (x^T, y^T, z^T)$, множество $\Omega = X \times Y \times Z$ содержится в
 $\mathbf{E}^{q+}$, $q = m + n + l$; для $p = m, n, l, q$ векторы $o_p = (0, \dots, 0)^T \in \mathbf{E}^{p+}$, $e_p = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{E}^{p+}$,
где $\mathbf{E}^{p+}$ – неотрицательный ортант евклидова пространства $\mathbf{E}^p$ (размерности p);
символ « T » обозначает транспонирование вектора (матрицы).

3. Функция Нэша

Определим функцию Нэша $F(\omega)$ игры Γ следующим образом:

$$\delta_x(\omega) = \max \{f_x(x', y, z): x' \in X\} - f_x(\omega),$$

$$\delta_y(\omega) = \max \{f_y(x, y', z): y' \in Y\} - f_y(\omega),$$

$$\delta_z(\omega) = \max \{f_z(x, y, z'): z' \in Z\} - f_z(\omega),$$

$$F(\omega) = \delta_x(\omega) + \delta_y(\omega) + \delta_z(\omega).$$

Функция $F(\omega)$ является аналогом функции Нэша [4], определенной для биматричных игр. В силу линейности функций выигрышей по каждой переменной x, y, z , игра Γ выпукла, поэтому множество Ω^* точек Нэша не пусто, но не обязательно выпукло (определение выпуклых игр и их свойств можно найти в [5]). Отыскание решения игры Γ эквивалентно поиску глобального минимума (равного нулю) функции $F(\omega)$ на Ω .

22

4. Метод 3LP решения гексаматричной игры

Чтобы отыскать решение гексаматричной игры Γ , нужно относительно переменных $(\omega, \alpha, \beta, \gamma)$ решить квадратичную задачу Р вида

$$x^T(A_1 y + A_2 z) + y^T(B_1 x + B_2 z) + z^T(C_1 x + C_2 y) - \alpha - \beta - \gamma \rightarrow \max,$$

$$A_1 y + A_2 z \leq \alpha e_m, B_1 x + B_2 z \leq \beta e_n, C_1 x + C_2 y \leq \gamma e_l,$$

$$x^T e_m = 1, x \geq o_m, y^T e_n = 1, y \geq o_n, z^T e_l = 1, z \geq o_l, \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Положим счетчик итераций $t = 0$. В качестве начальной (стартовой) стратегии можно использовать любую пару чистых стратегий игроков (всего таких пар $mn + ml + nl$); например, зафиксировав пару стратегий $\{y^{(0)}, z^{(0)}\}$, будем решать последовательно (при $t = 0, 1, \dots$) поочередно три задачи,

$$P_x = P_x(y^{(t)}, z^{(t)}; x^{(t+1)}), P_y = P_y(x^{(t+1)}, z^{(t)}; y^{(t+1)}) \text{ и } P_z = P_z(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}; z^{(t+1)}),$$

следующего вида.

1. На множестве допустимых планов (x, β, γ) найти x^* – оптимальный план задачи $P_x(y', z'; x)$:

$$x^T(A_1 y' + A_2 z' + (B_1)^T y' + (C_1)^T z') + (y')^T(B_2 + (C_2)^T) z' - \beta - \gamma \rightarrow \max,$$

$$B_1 x \leq \beta e_n - B_2 z', C_1 x \leq \gamma e_l - C_2 y', x^T e_m = 1, x \geq o_m, \beta, \gamma \geq 0; \text{ далее } x' := x^*.$$

2. На множестве допустимых планов (y, α, γ) найти y^* – оптимальный план задачи $P_y(x', z'; y)$:

$$y^T(B_1 x' + B_2 z' + (A_1)^T x' + (C_2)^T z') + (x')^T(A_2 + (C_1)^T) z' - \alpha - \gamma \rightarrow \max,$$

$$A_1 y \leq \alpha e_m - A_2 z', C_2 y \leq \gamma e_l - C_1 x', y^T e_n = 1, y \geq o_n, \alpha, \gamma \geq 0;$$

далее $y' := y^*$.

3. На множестве допустимых планов (z, α, γ) найти z^* – оптимальный план задачи $P_Z(x', y'; z)$:

$$z^T (C_1 x' + C_2 y' + (A_2)^T x' + (B_2)^T y') + (x')^T (A_1 + (B_1)^T) y' - \alpha - \beta \rightarrow \max,$$

$$A_2 z \leq \alpha e_m - A_1 y', B_2 z = \beta e_n - B_1 x', z^T e_l = 1, z \geq o_l, \alpha, \beta \geq 0;$$

далее $z' := z^*$.

Оптимальные значения $F_t = F(\omega^{(t+1)})$ функции Нэша монотонно не возрастают по t . Итеративный процесс продолжается до тех пор, пока значение F_t не стабилизируется (т.е. при некотором t^* разность $F_{t^*} - F_{t^*+1}$ достаточно мала). Если при этом достигается $F_{t^*} = 0$, то точка Нэша найдена. Если значение F_{t^*} достаточно мало, то получено приближенное решение игры Γ . Иначе выбираем новую пару начальных стратегий, и итерационный процесс начинается заново.

5. ЛН-метод решения гексаматричной игры

Метод Лемке–Хаусона заменяет решение игры Γ на отыскание решения системы линейных ограничений в линейной задаче дополненности, связанной с игрой. В силу линейности условий задачи Q для игры трех лиц в частной постановке, имеющей вид

$$A_1 y + A_2 z + u = \alpha e_m, B_1 x + B_2 z + v = \beta e_n, C_1 x + C_2 y + w = \gamma e_l,$$

$$x^T e_m = 1, x \geq o_m, y^T e_n = 1, y \geq o_n, z^T e_l = 1, z \geq o_l, \alpha, \beta, \gamma \geq 0,$$

хотелось бы применить к игре Γ метод Лемке–Хаусона, как это делается для биматричных игр: замена переменных $x' = x/\alpha$, $y' = y/\beta$ переводит исходную задачу к эквивалентной линейной задаче дополненности. Для игры трех лиц этот прием не проходит. Тем не менее, решив с помощью ЛН-метода серию вспомогательных задач, найдем точку равновесия Нэша.

В решении игры Γ должны выполняться условия дополненности

$$x_i u_i = 0, 1 \leq i \leq m, y_j v_j = 0, 1 \leq j \leq n, z_k w_k = 0, 1 \leq k \leq l.$$

Определив $\alpha = \beta = \gamma = 1$, получим вспомогательную задачу в форме системы уравнений

$$A_1 y + A_2 z + u = e_m, B_1 x + B_2 z + v = e_n, C_1 x + C_2 y + w = e_l,$$

$$x, u \geq o_m, v \geq o_n, z, w \geq o_l.$$

Введя следующие обозначения:

$$H = \begin{pmatrix} O_m & A_1 & A_2 \\ B_1 & O_n & B_2 \\ C_1 & C_2 & O_l \end{pmatrix}, \quad s = (s_1, \dots, s_q)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_q)^T = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

54 $e = e_q$, $o = o_q$, $E = \text{diag}\{e\}$, где для $p = m, n, l$ все элементы квадратной матрицы O_p нулевые, E – единичная матрица размера q , приходим к линейной задаче дополнителъности: найти неотрицательное ($s, \sigma \geq 0$) решение линейной системы

$$55 \quad Hs + E\sigma = e.$$

56 Применим к этой задаче процедуру типа Лемке–Хаусона. В качестве начального базиса берем σ . Вводим в базис переменную x_1 . Из базиса выходит некоторая переменная, которая была выбрана из условия не нарушить неотрицательность значений базисных переменных. Далее вводим в базис переменную, связанную по условиям дополнителъности с переменной, вышедшей из базиса. Повторим эту операцию до выхода из базиса переменной x_1 .

57 В итоге получим «псевдоравновесие Нэша». Здесь «псевдоравновесие Нэша» взято в кавычках, так как при решении вспомогательной системы не были учтены условия $x^T e_m = 1$, $y^T e_n = 1$, $z^T e_l = 1$.

58 Так как метод Лемке–Хаусона может заиклиться, то, отправляясь от очередной начальной точки, выполняем заданное (ограниченное) количество итераций, например, q (размерность игры).

59 Начальные точки выбираем поочередно из множества $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_l\}$ (q штук). Полученный базис используем в качестве начального базиса для задачи Q . Этот начальный базис построим следующим образом. Сначала вводим в базис переменные из базиса вспомогательной задачи в те позиции, где они находились в базисе вспомогательной задачи. Наверняка остается некоторое количество переменных, которые не удастся ввести в базис в свои позиции, так как в ведущих позициях разложении соответствующих столбцов по текущему базису могут быть очень маленькие числа по абсолютной величине. Эти переменные вводим в базис в еще занятые позиции, где найдутся в ведущих позициях достаточно большие по абсолютной величине коэффициенты. Полученное таким образом решение может содержать отрицательные значения. В этом случае повторим решение вспомогательной задачи со следующей начальной точки. Полученная точка с неотрицательными значениями базисных переменных имеет такую же структуру, как решение вспомогательной задачи, то есть для него выполнены условия дополнителъности, и она является точкой равновесия Нэша.

60 Как показало решение тестовых игр, для получения результата достаточно было перебрать относительно небольшое количество «псевдоравновесий Нэша».

62 Тестирование методов решения игр трех лиц в частной постановке было проведено на персональном компьютере (процессор Intel(R) Core(TM)i5-3427U CPU @ 1.80GHz 2.300 GHz, память 4.00 ГБ, 4 ядра).

63 Программы для тестовых расчетов были составлены на языках фортран, матлаб (MatLab) и питон (Python). Для каждого набора размеров n, m, l решалась серия из 10 игр. Матрицы каждой игры генерировались независимо при помощи псевдо равномерного датчика случайных чисел.

64 В таблице использованы следующие обозначения: n, m, l – размеры игры; $startp$ – общее количество примененных стартовых (пар) стратегий; $iters$ – общее количество шагов симплексного типа; $time$ – общее время решения серии 10 игр, в сек; neg – общее количество найденных псевдоравновесий Нэша с отрицательными значениями переменных в базисе, построенном для исходной полной задачи Q (где учтены условия $x^T e_m = 1, y^T e_n = 1, z^T e_l = 1$).

65 Таблица. Результаты применения 3LP-метода и метода Лемке–Хаусона для поиска точек Нэша серии гексаматричных игр

66

размер\метод $n=m=l$	3LP			LH			
	$time$	$startp$	$iters$	$time$	$startp$	$iters$	neg
10	11	253	11144	3	64	158	20
20	155	1087	82751	3	38	513	15
30	676	1923	209065	6	69	1463	14
40	1352	2177	298122	13	76	1533	17
50	3662	3370	590558	28	150	5579	16
60	17741	3698	791033	48	221	8411	20
70	12726	5061	1294222	45	107	4835	15
80	13497	3662	1091164	65	126	5542	20
90	48446	4375	1519861	92	141	5791	17
100	81384	6841	2687617	75	101	5812	16

67 Метод 3LP существенно уступает LH-методу, что особенно впечатляет при сравнении общего количества выполненных итераций. 3LP-метод для каждой стартовой точки совершает до 30 шагов, решая на каждом шаге последовательно три задачи ЛП, и общее количество итераций есть суммарное количество итераций, сделанных при решении этих задач ЛП. В LH-методе осуществляется переход к следующей стартовой стратегии, если не получено псевдоравновесие Нэша после m ($m = n = l$) итераций. Обращаем внимание на то, что пришлось просмотреть относительно небольшое количество псевдоравновесий Нэша (в среднем 1,7 на игру) для получения (настоящего) равновесия Нэша.

68

7. Заключение

69 Итак, удалось успешно приспособить метод Лемке–Хаусона к решению игр трех лиц в частной постановке (гексаматричными играм). Все тестовые задачи были решены, при этом LH-методом использовано существенно меньшее количество начальных точек, чем 3LP-методом.

Библиография:

1. Гольштейн Е.Г. Приближенный метод решения конечной игры трех лиц // Экономика и математические методы. 2014. Т. 50. Вып. 1. С. 110–116.
2. Гольштейн Е.Г., Малков У.Х., Соколов Н.А. Эффективность приближенного метода решения конечной игры трех лиц (вычислительный опыт) // Экономика и математические методы. 2017. Т. 53. Вып. 1. С. 94–107.
3. Lemke C.E., Howson, J.T., Jr. Equilibrium Points of Bimatrix Games // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1964. V. 12. P. 778–780.
4. Mills H. Equilibrium Points in Finite Games // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1960. V.8. No.2: P. 397–402.
5. Osborne M. An Introduction to Games Theory. New-York: Oxford University Press., 2004.
6. Strekalovskii A.S., Enkhbat R. Polymatrix Games and Optimization Problems // Avtomatika i Telemekhanika. 2014. No. 4. P. 51–66.

Lemke–Howson Method for Solving Finite Non-Cooperative Three-Person Games in a Special Setting

Ustav Malkov

CEMI RAS

Russian Federation, Moscow, 117485, Russia, Moscow, Volgina str., 13, apt.77

Nikolay Sokolov

CEMI RAS

Russian Federation, Moscow, 119296, Russia, Moscow, Molodezhnaya str., 4, ap.227

Abstract

It was shown by earlier numerical experiments, competitive 2LP-method may be a method of Lemke–Howson (LH-method), successfully solving bimatrix games. Unfortunately, the LH method cannot be applied to solving arbitrary games of three persons (in the general setting). However, we managed to adapt LH-method to the solution of some of three-person games (in a special setting – hexamatrix game). Numerical testing of the LH-method for solving hexamatrix games, revealed its dignity and disadvantages.

Keywords: bimatrix game, hexamatrix game, Nash function, Nash equilibrium point, approximate method of solving a game, the method of Lemke–Howson, 2LP- and 3LP-methods, numerical experiments

Date of publication: 12.01.2019

Citation link:

Malkov U., Sokolov N. Lemke–Howson Method for Solving Finite Non-Cooperative Three-Person Games in a Special Setting // Herald of CEMI. – 2018. – V. 1. – Issue 3. URL: <https://cemi.jes.su/s11111110000028-3-1/>. DOI: 10.33276/S0000028-3-1